1. a) Schreibe ohne Summenzeichen: $\sum\limits_{\nu=-2}^{2}(-2)^{2\nu+1}$

b) Schreibe mit dem Summenzeichen: $-2+\frac{5}{4}-\frac{8}{9}+\frac{11}{16}-\frac{14}{25}$

2. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2\sin x \cdot \cos x$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

a) Zeige, dass $F: x \mapsto \frac{1}{2} - \cos^2 x$ eine Stammfunktion von *f* ist!

b) Ist *F* auch Integralfunktion von *f*? Begründung!

c) Bestimme die Stammfunktion von *f*, deren Graph durch den Punkt $(\pi \mid \pi)$ verläuft.

3. Berechne:

a) $\int \frac{5}{2} \cdot \sin \frac{2}{5} x \cdot dx$

b) $\int\limits_{3}^{2} \frac{2}{\sqrt{3x-5}} dx$

4. Vom Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, der *x*-Achse und den beiden Geraden $x - 1 = 0$ und $x - k = 0, (k > 1)$ wird ein Flächenstück mit dem Inhalt $J(k)$ eingeschlossen.

a) Berechne $J(k)$!

b) Ermittle $\lim\limits_{k \to \infty} J(k)$!

5. Gegeben sind die beiden Funktionenscharen $f_a: x \mapsto -\frac{1}{a^2}x^2 + 1$ und $g_a: x \mapsto -\frac{1}{a}x^2 + a$ mit $D_{f_a} = D_{g_a} = \mathbb{R}$ und $0 < a < 1$. Ihre Graphen werden mit G_{f_a} bzw. G_{g_a} bezeichnet.

a) Bestimme allgemein die Nullstellen und Scheitelpunkte von f_a und g_a in Abhängigkeit
von *a*.

b) Zeichne für $a = 0{,}5$ die Graphen $G_{f_{0,5}}$ und $G_{g_{0,5}}$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem [LE = 4 cm!].

c) Berechne allgemein den von G_{f_a} und G_{g_a} eingeschlossenen Flächeninhalt $A(a)$ in Abhängigkeit von a. $\left[\text{zur Kontrolle: } A(a) = \frac{4}{3}a(1-a)\right]$

d) Für welchen Wert von *a* wird $A(a)$ maximal? Was erhält man für $\lim\limits_{a \to 0} A(a)$ bzw. $\lim\limits_{a \to 1} A(a)$? Wie lassen sich diese beiden Werte geometrisch erklären?

1. a) $\sum_{\nu=-2}^{2}(-2)^{2\nu+1} = -\frac{1}{8}-\frac{1}{2}-2-8-32 = -42\frac{5}{8}$

b) $-2+\frac{5}{4}-\frac{8}{9}+\frac{11}{16}-\frac{14}{25} = \frac{-2}{1^2}+\frac{5}{2^2}-\frac{8}{3^2}+\frac{11}{4^2}-\frac{14}{5^2} = \sum_{\nu=1}^{5}(-1)^{\nu}\,\frac{3\nu-1}{\nu^2}$

2. a) $\left(\frac{1}{2}-\cos^2 x\right)' = 0-2\cdot\cos x\cdot(-\sin x) = 2\cdot\sin x\cdot\cos x = f(x)$

b) $\frac{1}{2}-\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4};\ x_2 = \frac{3\pi}{4}$

d.h. F ist Integralfunktion zu f, z.B. $F(x) = \int_{\pi/4}^{x} f(t)dt$

c) $-\cos^2\pi + C = \pi \Rightarrow C = \pi + \cos^2\pi = \pi + 1 \Rightarrow F(x) = \pi + 1 - \cos^2 x$

3. a) $\int \frac{5}{2}\cdot\sin\frac{2}{5}x\cdot dx = \frac{5}{2}\cdot\left(-\cos\frac{2}{5}x\right)\cdot\frac{5}{2}+C = -\frac{25}{4}\cdot\cos\frac{2}{5}x + C$

b) $\int_{3}^{2}\frac{2}{\sqrt{3x-5}}dx = \left[2\cdot(3x-5)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\right]_3^2 = \left[\frac{4}{3}\sqrt{3x-5}\right]_3^2 = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{1}-\frac{4}{3}\cdot\sqrt{4} = \frac{4}{3}-\frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$

4. a) $J(k) = \left|\int_1^k\left(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}\right)dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{2}x^{-2}-2\cdot(-1\cdot x^{-1})\right]_1^k\right| = \left|\left[-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x}\right]_1^k\right| = \left|\frac{2}{k}-\frac{1}{2k^2}-\frac{3}{2}\right|$

b) $\lim_{k\to\infty} J(k) = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2}{k}-\frac{1}{2k^2}-\frac{3}{2}\right| = |-1{,}5| = 1{,}5$

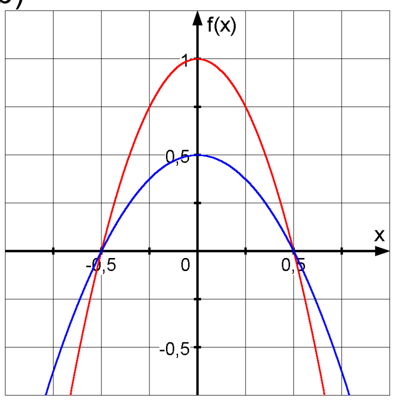
5. a) $f_a(x) = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2} = -1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x_1 = +a;\ x_2 = -a$

$\Rightarrow$ Scheitel bei $x = 0;\ y = 1$

$g_a(x) = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{a} = -a \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x_1 = +a;\ x_2 = -a$

$\Rightarrow$ Scheitel bei $x = 0;\ y = a$

b)



c) $f_a(x) = g_a(x) \Rightarrow -\frac{1}{a^2}x^2+1 = -\frac{1}{a}x^2+a$

$\Rightarrow -x^2+a^2 = -ax^2+a^3 \Rightarrow (a-1)\,x^2 = a^2(a-1)$

$\Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow$ Schnittstellen bei $x_1 = +a$ und $x_2 = -a$

$$A(a) = \int_{-a}^{a}(f_a(x)-g_a(x))\,dx = \left[-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}+x-\left(-\frac{1}{a}\cdot\frac{x^3}{3}+ax\right)\right]_{-a}^{a} = \left[-\frac{x^3}{3a}\cdot\left(1-\frac{1}{a}\right)+x\cdot(1-a)\right]_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{a^2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{a}\right)+a\cdot(1-a)-\left[-\frac{a^2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{a}\right)-a\cdot(1-a)\right] = \frac{2}{3}a^2-\frac{2}{3}a+2a-2a^2 = \frac{4}{3}a-\frac{4}{3}a^2$$

d) $\frac{dA}{da} = \frac{d}{da}\left(\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}a^2\right) = \frac{4}{3}-\frac{8}{3}a;\quad \frac{dA}{da} = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}-\frac{8}{3}a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$\lim_{a\to 0} A(a) = 0$, weil die beiden Integrationsgrenzen immer näher zusammenrücken

$\lim_{a\to 1} A(a) = 0$, weil $f_1(x) = g_1(x)$ ist!