1. Bestimmen Sie rechnerisch $b \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2b\\b+1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\b-2\\b\end{pmatrix}$ in einer Ebene liegen. Berechnen Sie für die gefunden Werte von *b* jeweils die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch! [*6 BE*]

2. Geben Sie zwei (unterschiedliche) Gründe dafür an, dass die Menge *V* der Vektoren $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, die die Gleichung $2x_1+4x_2-3x_3+2=0$ erfüllen, zusammen mit der üblichen Addition und S-Multiplikation keinen Vektorraum bildet. [*4 BE*]

3. In einem Koordinatensystem sind die Punkte $A(5|1|2{,}5)$, $B(4|6|1)$, $C(-2|5|1)$ und $E(-1|3|6)$ gegeben.

a) *A*, *B* und *C* sind die Ecken eines Parallelogramms *ABCD*. Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes *D*. [*3 BE*]

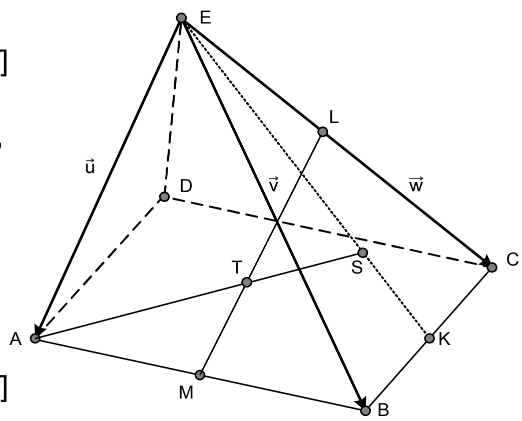
b) Zeichnen Sie die Pyramide *ABCDE* in ein Koordinatensystem ein. (Platzbedarf ca. ½ Seite!) [6 *BE*]

c) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden *g* auf, die durch *A* und *B* verläuft und bestimmen Sie den Spurpunkt S_2 von *g*. [*6 BE*]

d) $R(r_1|-2|r_3)$ liegt auf der Parallelen *p* zu *g* durch den Punkt *E*. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten r_1 und r_3. [*6 BE*]

e) Die Pyramide *ABCDE* wird durch die Vektoren $\vec{u}=\overrightarrow{EA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{EB}$ und $\vec{w}=\overrightarrow{EC}$ aufgespannt. *M* ist der Mittelpunkt der Seite [*AB*], *S* der Schwerpunkt des Dreiecks *BCE*. *L* liegt auf [*EC*] mit $\overrightarrow{EL}=r\cdot\overrightarrow{EC}$.

Bestimmen Sie allgemein den Wert für *r* so, dass sich *AS* und *ML* im Schnittpunkt *T* schneiden. In welchem Verhältnis teilt *T* die Strecke [*AS*]? [*11 BE*]



4. Gegeben sind nun die beiden Punkte $P(2|5|0)$ und $Q(3|7|0)$.

a) Bestimmen Sie (z.B. anhand einer Zeichnung) die Koordinaten des Punktes Q′, der durch Spiegelung von *Q* an der x_2-Achse entsteht. [*2 BE*]

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt *S* der Geraden *PQ* mit der x_2-Achse. [*3 BE*]

c) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks *QQ′S*? [*3 BE*]

1.

$$det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2b & 0 \\ 2 & b+1 & b-2 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0+2b\cdot(b-2)+0-0-0-4b^2=0 \Leftrightarrow -4b-2b^2=0 \Leftrightarrow b(2+b)=0$$

$$\Rightarrow b_1=0 \vee b_2=-2$$

für $b_1=0 \Rightarrow \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind kollinear

für $b_2=-2 \Rightarrow \vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-1\\0\end{pmatrix};\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-4\\-2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind kollinear

2.

1) $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \notin V$

2) $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \in V$, denn $2\cdot(-1)+4\cdot 0-3\cdot 0+2=0$

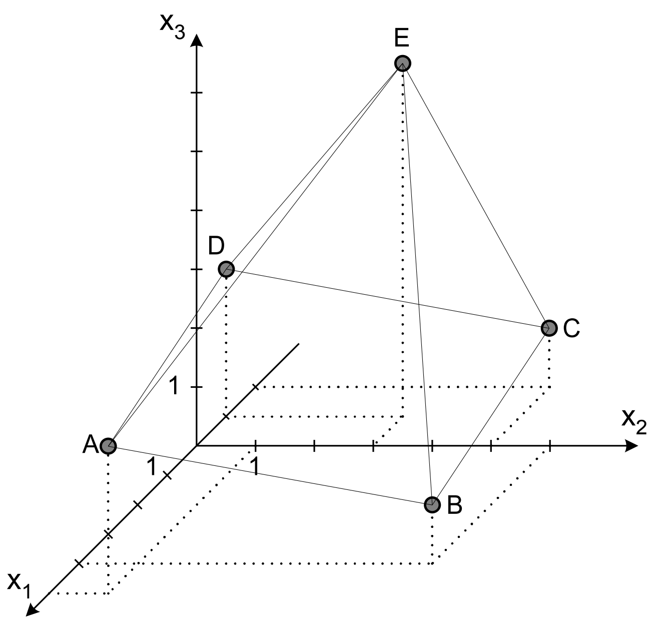
aber $2\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} \notin V$, denn $2\cdot(-2)+4\cdot 0-3\cdot 0+2 \neq 0$

3.

a)

$$\vec{D}=\vec{A}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}5\\1\\2{,}5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2-4\\5-6\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2{,}5\end{pmatrix} \Rightarrow D(-1|0|2{,}5)$$

b)



c)

$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}; \;\; \lambda \in \mathbb{R}$

$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}; \;\; \lambda \in \mathbb{R}$

Spurpunkt S_2:

$x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 1 + 5 \cdot \lambda \;\Leftrightarrow\; \lambda = -0{,}2$

$\Rightarrow\; x_1 = 5 - 0{,}2 \cdot (-1) = 5{,}2; \;\; x_3 = 2{,}5 - 0{,}2 \cdot (-1{,}5) = 2{,}8$

$\Rightarrow\; S_2(5{,}2|0|2{,}8)$

d)

$p: \vec{X} = \vec{E} + \mu \cdot \overrightarrow{AB}; \;\; \mu \in \mathbb{R}$

$p: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}; \;\; \mu \in \mathbb{R}$

$R \in p \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} r_1 \\ -2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} r_1 = -1 - \mu \\ -2 = 3 + 5\mu \\ r_3 = 6 - 1{,}5\mu \end{array} \right\}$

$\Rightarrow\; \mu = -1; \;\; r_1 = -1 - (-1) = 0; \;\; r_3 = 6 - 1{,}5 \cdot (-1) = 7{,}5 \;\; \Rightarrow R(0|-2|7{,}5)$

e)

$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AT} = \alpha \cdot \overrightarrow{AS} = \alpha\left(\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EK}\right) = -\alpha\vec{u} + \frac{2}{3}\alpha\left(\frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}\right) = -\alpha\vec{u} + \frac{1}{3}\alpha\vec{v} + \frac{1}{3}\alpha\vec{w}$

$\overrightarrow{TM} = \beta \cdot \overrightarrow{LM} = \beta\left[\overrightarrow{LE} + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})\right] = -\beta r\,\vec{w} + \frac{1}{2}\beta\vec{u} + \frac{1}{2}\beta\vec{v}$

$\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

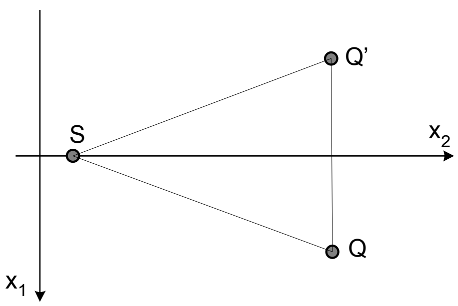
$\Rightarrow\; \vec{u}\left(-\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\right) + \vec{v}\left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\right) + \vec{w}\left(\frac{1}{3}\alpha - \beta r\right) = \vec{0}$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sind linear unabhängig

$\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} -\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{3}\alpha - \beta r = 0 \end{array} \right\} \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{l} \alpha = \frac{3}{4} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ r = \frac{1}{2} \end{array}$

$\Rightarrow\; \overrightarrow{AT} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AS}; \;\; \overrightarrow{TS} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AS} \;\; \Rightarrow \overrightarrow{AT} = 3 \cdot \overrightarrow{TS}$

4. Skizze:



a) $Q'(-3|7|0)$

b)

$PQ: \vec{X} = \vec{P} + \varphi\,\overrightarrow{PQ}; \;\; \varphi \in \mathbb{R}$

$PQ: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \;\; \varphi \in \mathbb{R}$

$x_1 = 0 \;\Rightarrow\; 2 + 1 \cdot \varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = -2 \;\Rightarrow\; x_2 = 1 \;\Rightarrow\; S(0|1|0)$

c) $A_{\Delta QQ'S} = \frac{1}{2}\overline{QQ'} \cdot \overline{h} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$