1. Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k: x \mapsto x \cdot e^{-kx^2};\ k \in \mathbb{R}^+;\ D_k = \mathbb{R}$. G_k bezeichnet den Graphen von f_k.

a) Welche Symmetrieeigenschaft hat G_k? Geben Sie das Verhalten von f_k für $x \to \pm\infty$ und die Nullstelle von f_k an. [3 *BE*]

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte von G_k. [10 *BE*]
$\left[\text{zur Kontrolle: } f_k'(x) = (1-2kx^2) \cdot e^{-kx^2}\right]$

c) Ermitteln Sie die möglichen Wendepunkte von G_k.
Hinweis: Der Nachweis, dass an den gefundenen Stellen tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, ist <u>nicht</u> erforderlich! [4 *BE*]

d) Zeichnen Sie für G_k für $k = \frac{1}{8}$ in ein passendes Koordinatensystem ein. [4 *BE*]

e) Die beiden Koordinatenachsen und G_k begrenzen im ersten Quadranten ein sich bis ins Unendliche erstreckende Flächenstück. Berechnen Sie in Abhängigkeit von k den Inhalt dieses Flächenstücks. [4 *BE*]

2. Bestimmen Sie für die Funktion $f: x \mapsto -x^2 + 4;\ D = \mathbb{R}_0^+$ den Wert von $(f^{-1})'(-4)$ ohne f^{-1} direkt abzuleiten! [5 *BE*]

3. Gegeben sind die drei Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix};\ \mu \in \mathbb{R}$ und

$k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};\ \tau \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass sich die Geraden g und h schneiden. [3 *BE*]

b) Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E an, in der g und h liegen. Beschreiben Sie die Lage von E im Koordinatensystem. [*6 BE*]
$\left[\text{mögliches Ergebnis: } E: 4x_1 - 3x_3 - 3 = 0\right]$

c) Berechnen Sie die Spurpunkte von E an sowie den Schnittpunkt S der Ebene E mit der Geraden k. [5 *BE*]

d) Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ursprungsbene H an, die senkrecht auf k steht. Berechnen Sie die Schnittgerade von E und H. [*6 BE*]

1.a) $f_k(-x)=(-x)\cdot e^{-k(-x)^2}=-\left(x\cdot e^{-kx^2}\right)=-f_k(x)$ $\Rightarrow$ G_k ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\cdot e^{-kx^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{e^{kx^2}}=0$, da e^x „schneller" als jede Potenz von x anwächst.

einzige Nullstelle bei x = 0

1.b) $f_k'(x)=1\cdot e^{-kx^2}+x\cdot e^{-kx^2}\cdot(-2kx)=e^{-kx^2}\cdot\left(1-2kx^2\right)$

$f_k''(x)=e^{-kx^2}\cdot(-2kx)\cdot\left(1-2kx^2\right)+e^{-kx^2}\cdot(-4kx)=$

$=e^{-kx^2}\cdot\left[-2kx+4k^2x^3-4kx\right]=e^{-kx^2}\cdot\left[4k^2x^3-6kx\right]=2kx\cdot\left(2kx^2-3\right)\cdot e^{-kx^2}$

Extrempunkte:

$f_k'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 2kx^2=1 \;\Leftrightarrow\; x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2k}} \;\vee\; x_2=\dfrac{-1}{\sqrt{2k}}$

$f_k''\left(\dfrac{\pm1}{\sqrt{2k}}\right)=\dfrac{2k}{\pm\sqrt{2k}}\cdot\left(2k\cdot\left(\dfrac{\pm1}{\sqrt{2k}}\right)^2-3\right)\cdot e^{-k\cdot\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2k}}\right)^2}=\pm\sqrt{2k}\cdot(-2)\cdot e^{-0,5}$

$\Rightarrow\; f_k''(x_1)<0;\quad f_k''(x_2)>0$

$f_k\left(\dfrac{\pm1}{\sqrt{2k}}\right)=\dfrac{\pm1}{\sqrt{2k}}\cdot e^{-k\cdot\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2k}}\right)^2}=\dfrac{\pm1}{\sqrt{2k}}\cdot e^{-0,5}$

$\Rightarrow\; \mathrm{Max}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\,\middle|\,\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\cdot e^{-0,5}\right);\;\; \mathrm{Min}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2k}}\,\middle|\,\dfrac{-1}{\sqrt{2k}}\cdot e^{-0,5}\right)$

1.c) mögliche Wendepunkte:

$f_k''(x)=0\Leftrightarrow x=0 \vee 2kx^2-3=0\Leftrightarrow x_3=0 \vee x_{4/5}=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2k}}$

$f_k(0)=0 \;\Rightarrow\; WP_1(0\,|\,0)$

$f_k(x_{4/5})=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2k}}\cdot e^{-1,5} \;\Rightarrow\; WP_{2/3}\left(\pm\sqrt{\dfrac{3}{2k}}\,\middle|\,\pm\sqrt{\dfrac{3}{2k}}\cdot e^{-1,5}\right)$

Ergänzung (war in der Schulaufgabe nicht gefordert!):

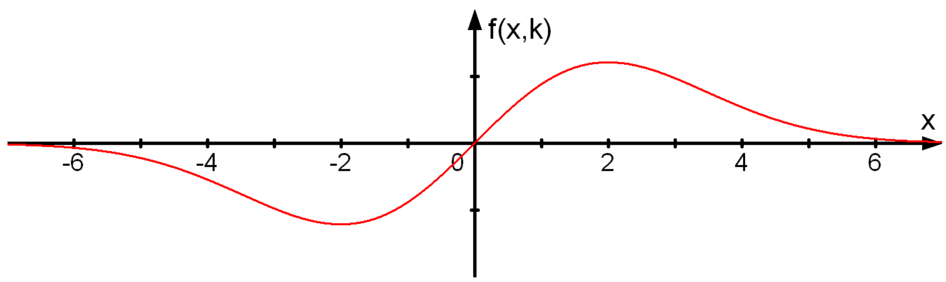
$f_k'''(x)=2k\cdot\left(12kx^2-4k^2x^4-3\right)\cdot e^{-kx^2}$

$x_3=0 \;\Rightarrow\; f_k'''(0)=-6k\neq0$

$x_{4/5}=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2k}} \;\Rightarrow\; 12kx^2-4k^2x^4-3=12k\cdot\dfrac{3}{2k}-4k^2\cdot\dfrac{9}{4k^2}-3=6 \;\Rightarrow\; f'''(x_{4/5})\neq0$

1.d) $k=\dfrac{1}{8} \;\Rightarrow\; \mathrm{Max}\left(2\,\middle|\,2\cdot e^{-0,5}\right)\approx(2\,|\,1{,}21);\;\; \mathrm{Min}\left(-2\,\middle|\,-2\cdot e^{-0,5}\right)\approx(-2\,|\,-1{,}21)$

Wendepunkte: $WP_1(0\,|\,0);\quad WP_{2/3}\left(\pm2\sqrt{3}\,\middle|\,\pm2\sqrt{3}\cdot e^{-1,5}\right)\approx(\pm3{,}46\,|\,\pm0{,}77)$



1.e) $A=\int\limits_0^\infty f_k(x)\,dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b x\cdot e^{-kx^2}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\left[e^{-kx^2}\cdot\dfrac{-1}{2k}\right]_0^b=\lim\limits_{b\to\infty}\left[e^{-kb^2}\cdot\dfrac{-1}{2k}\;-\;e^0\cdot\dfrac{-1}{2k}\right]_0^b=\dfrac{1}{2k}$

2. Umkehrfunktion zu f:

$y=-x^2+4 \Leftrightarrow y-4=-x^2 \Leftrightarrow -y+4=x^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{4-y}=x$

Für $x\in\mathbb{R}_0^+$ ist f(x) streng monoton fallend $\Rightarrow$ $f^{-1}(x)$ ist streng monoton fallend $\Rightarrow$ $f^{-1}(x)=+\sqrt{4-x}$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{-2y}=\frac{1}{-2\cdot\sqrt{4-x}}$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(-4)=\frac{1}{-2\cdot\sqrt{4+4}}=\frac{1}{-2\cdot\sqrt{8}}=-\frac{1}{4\cdot\sqrt{2}}$$

3.a) $$g=h \Rightarrow \begin{cases} 3=6+3\mu \\ -2+4\lambda=2+4\mu \\ 3=7+4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu=-1 \\ \lambda=0 \\ \mu=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{ Schnittpunkt } S(3\,|-2\,|\,3)$$

3.b) $$E:\vec{X}=\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}6-3\\2-(-2)\\7-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix};\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=3+3\mu \\ x_2=-2+4\lambda+4\mu \\ x_3=3+4\mu \Rightarrow \mu=1/4\,x_3-3/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1=3+3\cdot\left(1/4\,x_3-3/4\right)=3+\frac{3}{4}x_3-\frac{9}{4} \Rightarrow x_1-\frac{3}{4}x_3-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow 4x_1-3x_3-3=0$$

Da in der Koordinatengleichung x_2 nicht vorkommt ist E parallel zur x_2-Achse.

3.c) $S_1: x_2=x_3=0 \Rightarrow 4x_1-3=0 \Rightarrow x_1=\frac{3}{4} \Rightarrow S_1(0{,}75\,|\,0\,|\,0)$

$S_2: x_1=x_3=0 \Rightarrow -3=0$: Widerspruch; da $E\parallel x_2$-Achse kann es keinen Spurpunkt S_2 geben!

$S_3: x_1=x_2=0 \Rightarrow -3x_3-3=0 \Rightarrow x_3=-1 \Rightarrow S_3(0\,|\,0\,|-1)$

Schnittpunkt zwischen E und k:

$$k:\begin{Bmatrix} x_1=1+\tau \\ x_2=10-2\tau \\ x_3=-3+3\tau \end{Bmatrix} \text{ in E einsetzen: } 4x_1-3x_3-3=0 \Rightarrow 4\cdot(1+\tau)-3\cdot(-3+3\tau)-3=0$$

$$\Rightarrow 10-5\tau=0 \Rightarrow \tau=2 \Rightarrow \vec{S}=\begin{pmatrix}1\\10\\-3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Schnittpunkt } S(3\,|\,6\,|\,3)$$

3.d) $H: n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+n_4=0$

$(0\,|\,0\,|\,0)\in H \Rightarrow n_4=0$

$H\perp k \Rightarrow$ der Richtungsvektor von k ist ein möglicher Normalenvektor von H, also:

$n_1=1;\quad n_2=-2;\quad n_3=3$

$\Rightarrow H: x_1-2x_2+3x_3=0$

Schnittgerade zwischen E und H:

$$\left.\begin{matrix} H: x_1-2x_2+3x_3=0 \\ E: 4x_1-3x_3-3=0 \end{matrix}\right\} \text{ Addition beider Gleichungen } \Rightarrow 5x_1-2x_2-3=0$$

wähle z.B. $x_1=\sigma \Rightarrow x_2=2{,}5\,x_1-1{,}5=-1{,}5+2{,}5\sigma$

aus E: $x_3=\frac{4}{3}x_1-1=-1+\frac{4}{3}\sigma$

Schnittgerade $s:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\-1{,}5\\-1\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\2{,}5\\4/3\end{pmatrix};\quad \sigma\in\mathbb{R}$

oder $s:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\-1{,}5\\-1\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}6\\15\\8\end{pmatrix};\quad \sigma\in\mathbb{R}$