Stochastik

1. Ein Tetraeder hat auf seinen vier Seiten zweimal die Augenzahl 1 und je einmal die Augenzahlen 2 und 3. X sei die Augenzahl, die bei einem Wurf des Tetraeders auf der Unterseite liegt.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X. Wie groß ist die maximale absolute Abweichung von $|X-\mu|$? [*3 BE*]

b) Berechnen Sie $P(|X-\mu|\geq 1)$ mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschew und vergleichen Sie mit dem exakten Wert! [*4 BE*]

2. In einer Fabrik werden Glaskugeln für die Weihnachtsdekoration hergestellt, die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0,95 intakt sind.

a) In einer Schachtel werden jeweils 50 Kugeln verpackt. Geben Sie die (genaue) Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Anzahl der <u>defekten</u> Kugeln um höchstens 2 vom Erwartungswert abweicht. [*6 BE*]

b) Wie viele Kugeln muss man der laufenden Produktion mindestens entnehmen, um mit mehr als 95 % sicherzustellen, dass sich die relative Häufigkeit (für intakte Kugeln) von p um höchstens 1 % unterscheidet? [*6 BE*]

c) Bei der Produktion der Kugeln schwankt deren Durchmesser um den Erwartungswert 60 mm. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Durchmesser einer beliebig herausgegriffenen Kugel weniger als 2 mm vom Erwartungswert abweicht, soll mindestens 90 % betragen. Schätzen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschew ab, wie groß die Standardabweichung dabei höchstens sein darf. [*6 BE*]

Analytische Geometrie

3. Für zwei Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ ist folgender Term definiert:

$$\vec{a}*\vec{b}=a_1b_2-2a_1b_1-2a_2b_2+a_2b_1$$

a) Zeigen Sie, dass für diese Definition das Kommutativgesetz gilt. [*2 BE*]

b) Überprüfen Sie, ob für $\vec{a}\in\mathbb{R}^2, \vec{a}\neq\vec{0}$ auch $\vec{a}*\vec{a}>0$ gilt. [*4 BE*]

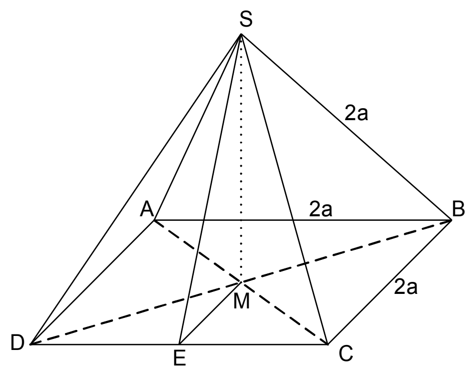
4. Gegeben sind die beiden Punkte $P=(-3|4|-6)$ und $R=(-5|2|2)$ sowie die Gerade $g:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \lambda\in\mathbb{R}$. Der Punkt P liegt auf g (Nachweis nicht erforderlich!)

a) Berechnen Sie den Abstand des Punktes R von der Geraden g sowie den Fußpunkt F des Lots von R auf g. [*7 BE*]

b) Der Punkt R' entsteht durch Spiegelung von R an F. Berechnen Sie die Koordinaten von R'. (Skizze!) [*5 BE*]

5. Eine vierseitige Pyramide mit der Seitenlänge 2a hat die quadratische Grundfläche mit den Eckpunkten $A=(0|0|0)$, $B=(0|2a|0)$, $C=(2a|2a|0)$ und $D=(2a|0|0)$ sowie die Spitze $S=(a|a|a\sqrt{2})$, $a\in\mathbb{R}^+$.

Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Grundfläche ABCD und der Seite DCS, d.h. den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{EM}$ und $\overrightarrow{ES}$ auf 2 Dezimalen. [*7 BE*]



Stochastik

1. a) $\mu=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{7}{4}=1{,}75$

$\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{4}\cdot 2^2+\frac{1}{4}\cdot 3^2=\frac{11}{16}=0{,}6875$

max. Abweichung für $x_i=3$: $|X-\mu|=1{,}25$

b) $P(|X-\mu|\geq 1)\leq\frac{\mathrm{Var}(X)}{1^2}=\frac{11}{16}=68{,}75\,\%$

exakter Wert: $P(|X-\mu|\geq 1)=P(\{3\})=\frac{1}{4}=25\,\%$

2. a) Der Erwartungswert für intakte Kugel ist $\mu_{\text{intakt}}=n\cdot p=50\cdot 0{,}95=47{,}5$, der für defekte Kugel entsprechend $\mu_{\text{defekt}}=n\cdot q=50\cdot 0{,}05=2{,}5$

$\Rightarrow\ P(|X-\mu|\leq 2)=P(\{1;2;3;4\})=\sum_{i=1}^{4} B(50;0{,}05;i)=$

$=\sum_{i=0}^{4} B(50;0{,}05;i)-B(50;0{,}05;0)=0.89638-0{,}07694=0{,}81944$

b) $P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\leq 0{,}01\right)>1-\frac{p\cdot(1-p)}{0{,}01^2\cdot n}>0{,}95$

$\Rightarrow\ 1-\frac{0{,}95\cdot 0{,}05}{0{,}01^2\cdot n}>0{,}95$

$0{,}05>\frac{0{,}0475}{0{,}0001\cdot n}$

$n>\frac{0{,}0475}{0{,}0001\cdot 0{,}05}\ \Rightarrow\ n>9500$

Man muss also mindestens 9501 Kugeln testen!

c) $P(|X-\mu|<2\text{mm})\geq 1-\frac{\mathrm{Var}(X)}{(2\text{mm})^2}>0{,}9$

$\Rightarrow\ 0{,}1>\frac{\mathrm{Var}(X)}{(2\,\text{mm})^2}\ \Rightarrow\ \mathrm{Var}(X)<0{,}1\cdot 4\,\text{mm}^2\ \Rightarrow\ \mathrm{Var}(X)<0{,}4\,\text{mm}^2\ \Rightarrow\ \sigma>\sqrt{0{,}4\,\text{mm}^2}\approx 0{,}63\,\text{mm}$

Analytische Geometrie

3. **a)** $\vec{a}*\vec{b}=a_1b_2-2a_1b_1-2a_2b_2+a_2b_1$

$\vec{b}*\vec{a}=b_1a_2-2b_1a_1-2b_2a_2+b_2a_1=$

$=a_2b_1-2a_1b_1-2a_2b_2+a_1b_2=a_1b_2-2a_2b_2-2a_1b_1+a_2b_1=\vec{a}*\vec{b}$

b) Sei $\vec{a}\in\mathbb{R}^2$, $\vec{a}\neq\vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{a}*\vec{a}=a_1a_2-2a_1a_1-2a_2a_2+a_2a_1=2\left(a_1a_2-a_1^2-a_2^2\right)$

Wähle z.B. $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{a}*\vec{a}=2\left(1\cdot 0-1^2-0^2\right)=-2<0$

4. **a)**

$$g:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\-2-2\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{RX}=\begin{pmatrix}\lambda\\-2-2\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+5\\-4-2\lambda\\2\lambda-2\end{pmatrix}$$

$f(\lambda)=e^2=\left|\overrightarrow{RX}\right|^2=(\lambda+5)^2+(-4-2\lambda)^2+(2\lambda-2)^2=$

$=\lambda^2+10\lambda+25+16+16\lambda+4\lambda^2+4\lambda^2-8\lambda+4=9\lambda^2+18\lambda+45$

$f'(\lambda)=18\lambda+18=0 \;\Rightarrow\; \lambda=-1$

$\Rightarrow\; e_{min}=\sqrt{9\cdot(-1)^2+18\cdot(-1)+45}=\sqrt{36}=6$

Lotfußpunkt: $\vec{F}=\begin{pmatrix}-1\\-2-2\cdot(-1)\\2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; F(-1\,|\,0\,|\,-2)$

b) $\overrightarrow{RR'}=2\cdot\overrightarrow{RF} \;\Rightarrow\; \vec{R}'=\vec{R}+2\cdot\overrightarrow{RF}=\begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1+5\\0-2\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; R'(3\,|-2\,|-6)$

5. $\overrightarrow{EM}=\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2a\\a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{ES}=\begin{pmatrix}a\\a\\a\sqrt{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2a\\a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\0\\a\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$$\cos\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{ES}\right)=\frac{\overrightarrow{EM}\circ\overrightarrow{ES}}{\left|\overrightarrow{EM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ES}\right|}=\frac{(-a)\cdot(-a)+0\cdot 0+0\cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{(-a)^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{(-a)^2+0^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{a^2}{a\cdot a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow\; \sphericalangle\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{ES}\right)\approx 54{,}74°$