Mathematik 9		12.02.2021
Quadratische Funktionen	Extremwertprobleme	

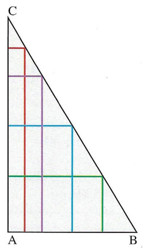
Arbeitsaufträge

- *Lies dir den folgenden Text aufmerksam durch.*
- *Rechne die Umformungen selbstständig nach.*
- *Wenn du an einer Stelle nicht mehr weiterkommst, dann gehe noch einmal einen Schritt zurück und lies den Abschnitt erneut durch.*

In der Technik, im Alltag, in der Wirtschaft treten immer wieder Probleme auf, bei denen danach gefragt ist, wann eine bestimmte Größe (Leistung eines Motors, Energieverbrauch, Gewinn eines Unternehmens, …) möglichst groß bzw. möglichst klein wird.

Einige dieser Fragestellungen können wir mit unseren Erkenntnissen über quadratische Funktionen beantworten.

Als Beispiel dazu schauen wir uns im Schulbuch auf Seite 103 die Aufgabe 1 an.



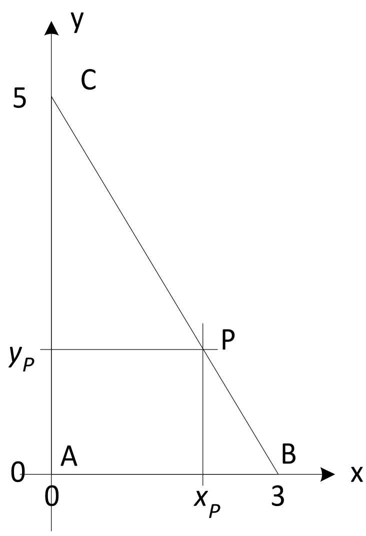
Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind verschiedene Rechtecke eingezeichnet.

Wie muss man die Seiten des Rechtecks wählen, damit sein Flächeninhalt so groß wie möglich ist?

Die beiden Katheten sind $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 5\,\text{cm}$ lang.

Länge und Breite der Rechtecke hängen von dem Punkt ab, in dem das Rechteck die Hypotenuse $[BC]$ berührt.

Wir betrachten die Situation jetzt in einem Koordinatensystem.



Der Punkt $P(x_P | y_P)$ liegt auf der Geraden BC, die durch die Gleichung $y = -\frac{5}{3}x + 5$ beschrieben werden kann (Nachrechnen!).

Das eingezeichnete Rechteck hat die Breite x_P und die Höhe y_P, also den Flächeninhalt $A = x_P \cdot y_P$.

A hängt also von der Wahl der x-Koordinate des Punktes P ab, d.h.
A kann durch einen (Funktions-)Term $A(x)$ beschrieben werden.

Da P auf der Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{5}{3}x + 5$ liegt, gilt $y_P = -\frac{5}{3}x_P + 5$ und damit

$$A(x_P) = x_P \cdot y_P$$
$$A(x_P) = x_P \cdot \left(-\frac{5}{3} \cdot x_P + 5\right)$$
$$A(x_P) = -\frac{5}{3} \cdot x_P^2 + 5x_P$$

oder kurz: $A(x) = -\frac{5}{3} \cdot x^2 + 5x.$

Dies ist der Term einer quadratischen Funktion. Die zugehörige Parabel ist nach unten geöffnet. Am Scheitelpunkt $S(x_S | y_S)$ hat sie ihren größten Funktionswert. D.h. das Rechteck hat dann den größten Flächeninhalt, wenn $x = x_S$ ist. *Fortsetzung auf der nächsten Seite* ↘

Das ursprüngliche Problem kann also dadurch gelöst werden, indem man den Scheitelpunkt (bzw. dessen x-Koordinate) der quadratischen Funktion $A(x) = -\frac{5}{3} \cdot x^2 + 5x$ bestimmt.

Dazu wandeln wir mithilfe der quadratischen Ergänzung $A(x)$ in die Scheitelform um:

$$A(x) = -\frac{5}{3} \cdot x^2 + 5x$$

$$A(x) = -\frac{5}{3} \cdot \left[x^2 - 3x + \ldots - \ldots\right]$$

$$A(x) = -\frac{5}{3} \cdot \left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]$$

$$A(x) = -\frac{5}{3} \cdot \left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right]$$

$$A(x) = -\frac{5}{3} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{15}{4}\right)$$

Das Rechteck hat folglich für $x = \frac{3}{2}$ den größten Flächeninhalt, d.h. wenn es 1,5 cm breit ist. Dann beträgt der Flächeninhalt $\frac{15}{4}\text{cm}^2 = 3{,}75\,\text{cm}^2$.

Übertrage nun den folgenden Eintrag in dein Heft:

Extremwertprobleme

In der Technik, im Alltag, in der Wirtschaft treten immer wieder Probleme auf, bei denen danach gefragt ist, wann eine bestimmte Größe (Leistung eines Motors, Energieverbrauch, Gewinn eines Unternehmens, …) möglichst groß bzw. möglichst klein wird.

In einfachen Fällen kann man solche Probleme mithilfe einer quadratischen Funktion lösen.

Dazu geht man schrittweise vor:

1. Stelle einen Ansatz für die Größe auf, die maximal (oder minimal) werden soll.

2. Suche eine Beziehung zwischen den vorkommenden Variablen.

3. Stelle einen Funktionsterm für die gesuchte Größe auf, in dem nur noch eine Variable vorkommt.

4. Forme den Funktionsterm in die Scheitelform um.

5. Lies aus der Scheitelform den Wert der x-Koordinate ab.

6. Für diesen Wert hat die gesuchte Größe ihren maximalen (bzw. minimalen) Wert.

Führt die Suche nach einem Extremwert einer Größe auf eine quadratische Funktion, dann liefert der Scheitelpunkt der Parabel diesen Extremwert.

Schaue dir nun noch das Beispiel auf Seite 103 (Mitte) sorgfältig durch, in dem aus Maschendraht ein möglichst großes Gehege eingezäunt werden soll.