Mathematik 9		26.01.2021
Quadratische Funktionen und Gleichungen		Schnittpunkte von Parabeln

Überlege dir zunächst Antworten auf die folgenden Fragen

- Der Graph einer Funktion $f: x \mapsto f(x)$ verläuft durch einen Punkt $P(x_P \mid y_P)$. Welche Bedingung bzw. Gleichung müssen die Koordinaten des Punktes dann erfüllen?
- Wie kann man den Schnittpunkt $S(x_S \mid y_S)$ zweier Geraden mit den Gleichungen $g_1: y = 2x - 1$ und $g_2: y = -0{,}5x + 3$ berechnen?

Lies dir nun den folgenden Text durch und rechne die Beispiel nach.

Wenn ein Punkt auf dem Graphen einer Funktion liegt, dann müssen seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen. Das heißt der Wert des Terms $f(x_P)$ muss gleich y_P sein.

Zwei Geraden, die nicht parallel sind, schneiden sich in einem Punkt $S(x_S \mid y_S)$. Wenn man die x-Koordinate von S in die beiden Geradengleichungen einsetzt, dann muss man den gleichen y-Wert erhalten. Diese Tatsache kann man verwenden, wenn man den Schnittpunkt berechnen muss.

Man setzt die beiden Terme gleich und löst nach x auf:

$$\begin{aligned} &g_1(x) = g_2(x) \\ &2x - 1 = -0{,}5x + 3 \\ &x = \frac{8}{5} \text{ oder } x = 1{,}6 \\ &\Rightarrow\ x_S = 1{,}6 \end{aligned}$$

Den Wert von x_S setzt man jetzt in eine der beiden Geradengleichungen ein und berechnet so y_S:

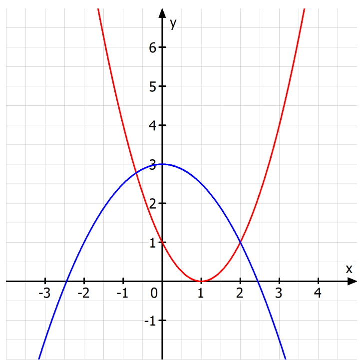
$$y_S = g_1(x_S) = 2x_S - 1 = 2 \cdot 1{,}6 - 1 = 2{,}2.$$

Der Schnittpunkt liegt also bei $S(1{,}6 \mid 2{,}2)$.

Das gleiche Verfahren setzt man ein, wenn man den Schnittpunkt bzw. die Schnittpunkte zweier Parabeln oder einer Parabel mit einer Geraden berechnen muss.

<u>Beispiel</u>:

Gesucht sind die Schnittpunkte der beiden Parabeln mit den Funktionstermen $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$ (rot) und $f_2(x) = -0{,}5x^2 + 3$ (blau).



Wie oben setzt man die beiden Funktionsterme gleich und löst nach x auf:

$$\begin{aligned} &f_1(x) = f_2(x) \\ &x^2 - 2x + 1 \ = \ -0{,}5x^2 + 3 \\ &1{,}5x^2 - 2x - 2 = 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Lösungsformel kann man die Lösungen bestimmen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1{,}5}$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{2 \pm 4}{3}$$

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$

Nun setzt man die gefundenen Lösungen in $f_1(x)$ (oder in $f_2(x)$) ein und berechnet die zugehörigen y-Koordinaten:

$$y_1 = f_1(x_1) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$$

$$y_2 = f_1(x_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{4}{9} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{25}{9} \approx 2{,}78$$

Die Schnittpunkte liegen also bei $S_1(2 \mid 1)$ und $S_2\left(-\frac{2}{3} \middle| \frac{25}{9}\right)$.

Bearbeite nun auf Seite 87 die Aufgabe Nr. 25 b. Du musst dazu allerdings erst die Funktionsterme der beiden Parabeln finden. Wie das geht, haben wir am 22. Januar besprochen.