Wir bearbeiten aus dem Schulbuch auf Seite 126 die Aufgabe Nr. 12.

12
Thomas ist der Elfmeterschütze seiner Mannschaft. Zu Spielbeginn beträgt seine Treffsicherheit bei einem Elfmeter 95 %. Da er leider konditionelle Probleme hat, sinkt seine Treffsicherheit bis zur 90. Minute linear auf 65 %. Thomas tritt nach der 10. und 70. Spielminute zum Elfmeter an.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er beide Elfmeter?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er nur einen Elfmeter?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verschießt er beide Elfmeter?
d) In der letzten Spielminute bekommt seine Mannschaft einen dritten Elfmeter zugesprochen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt Thomas alle drei Elfmeter?

Bevor die Teilaufgaben a, bis d) bearbeitet werden können, muss man sich erst einmal mit der Treffsicherheit von Thomas beschäftigen.

Im Aufgabentext heißt es, die Treffsicherheit

- beträgt bei Spielbeginn 95%
- sie sinkt bis zur 90. Minute auf 65%
- die Abnahme ist linear.

Diese Angaben müssen wir in ein mathematisches Modell umsetzen. Wir suchen eine lineare Funktion *f*(*t*), die die Treffsicherheit für jeden Zeitpunkt *t* beschreibt.

Überlege dir jeweils, wie du den nächsten Schritt durchführen würdest. Schaue dir dann meinen Lösungsweg an und rechne die Rechnungen nach.

- Wie lautet allgemein die Gleichung einer linearen Funktion?
- In diesem Fall müssen wir die Variable *x* durch *t* (für die Zeit) ersetzen.
  Deshalb muss eine andere Variable für den Achsenabschnitt gewählt werden.
- Ein möglicher Ansatz ist dann $f(t) = m \cdot t + n$.

- Was bedeutet die Aussage „die Treffsicherheit beträgt bei Spielbeginn 95%“?

  Für $t = 0$ muss $y = f(0) = 0{,}95$ sein.

  $\Rightarrow \; m \cdot 0 + n = 0{,}95$
  $n = 0{,}95$

- Jetzt musst du die zweite Aussage „sie sinkt bis zur 90.Minute auf 65%“ umsetzen:

  $f(90) = 0{,}65$

Setze $t = 90$ und $n = 0{,}95$ in die Funktionsgleichung ein und du erhältst:

$$f(90) = 0{,}65$$
$$0{,}65 = m \cdot 90 + 0{,}95$$
$$-0{,}3 = m \cdot 90$$
$$\Rightarrow m = \frac{-0{,}3}{90} = -\frac{1}{300}$$

Die Treffsicherheit kann also mit dem Funktionsterm $f(t) = -\frac{1}{300} \cdot t + 0{,}95$ berechnet werden.

Für die Teilaufgaben a; bis d) benötigen wir die Treffsicherheit nach 10, nach 70 und nach 89 Minuten, also

$$f(10) = -\frac{1}{300} \cdot 10 + 0{,}95 = \frac{11}{12}$$
$$f(70) = -\frac{1}{300} \cdot 70 + 0{,}95 = \frac{43}{60}$$
$$f(89) = -\frac{1}{300} \cdot 89 + 0{,}95 = \frac{49}{75}$$

a) $P(\text{beide Treffer}) = f(10) \cdot f(70) = \frac{11}{12} \cdot \frac{43}{60} = \frac{473}{720} \approx 65{,}7\%$

b) $P(\text{nur ein Treffer}) = P\Big(\big\{(\text{Treffer; kein Treffer})\big\}\Big) + P\Big(\big\{(\text{kein Treffer; Treffer})\big\}\Big) =$

$= f(10) \cdot \big(1 - f(70)\big) + \big(1 - f(10)\big) \cdot f(70) =$

$= \frac{11}{12} \cdot \left(1 - \frac{43}{60}\right) + \left(1 - \frac{11}{12}\right) \cdot \frac{43}{60} = \frac{23}{72} \approx 31{,}9\%$

c) $P(\text{beide verschossen}) = P\Big(\big\{(\text{kein Treffer; kein Treffer})\big\}\Big) =$

$= \big(1 - f(10)\big) \cdot \big(1 - f(70)\big) =$

$= \frac{1}{12} \cdot \frac{17}{60} = \frac{17}{720} \approx 2{,}4\%$

d) $P(\text{alle drei Treffer}) = f(10) \cdot f(70) \cdot f(89) =$

$= \frac{11}{12} \cdot \frac{43}{60} \cdot \frac{49}{75} = \frac{23177}{540000} \approx 42{,}9\%$