Mathematik 9		
Quadratische Funktionen und Gleichungen	Allgemeine Lösungsformel	12.01.2021

Arbeitsaufträge

1. Lies den folgenden Text genau durch und vergleiche dazu die Herleitung der allgemeinen Lösungsformel auf Seite 82 unseres Schulbuchs.
2. Übertrage danach den Kasten auf Seite 83 oben in dein Schulheft.
3. Arbeite die Beispiele 2 (Seite 83 unten rechts) und 3 (Seite 84 oben) sorgfältig durch.
4. Wenn du noch Fragen zur Herleitung oder zu den Beispielen hast, dann stelle diese bei der Videokonferenz am Mittwoch.

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

In vielen Fällen ist die Anwendung der quadratischen Ergänzung zur Lösung einer quadratischen Gleichung zu aufwändig. Man verwendet dann eine allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

Die Herleitung dieser Formel findest du in unserem Schulbuch auf Seite 82. Bei dieser Herleitung startet man mit der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung $a x^2+bx+c=0$. Zunächst wird a ausgeklammert und danach dividiert man beide Seiten der Gleichung durch a. Jetzt kann die quadratische Ergänzung angewandt werden.

Ich möchte im Folgenden die weitere Herleitung noch ein wenig erläutern.

Durch Anwendung der Rechenregeln für (Bruch-)terme erhält man die Gleichung

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Diese Gleichung hat die Form $y^2=d$. Es gibt nur dann Lösungen, wenn die rechte Seite $d\geq 0$ ist. Dann gibt es die beiden Lösungen $y_1=+\sqrt{d}$ und $y_2=-\sqrt{d}$.

Übertragen auf die Gleichung $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ bedeutet dies, dass es nur dann Lösungen gibt, wenn der Term $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geq 0$ ist.

Die beiden möglichen Lösungen der Gleichung sind dann:

$$x_1+\frac{b}{2a}=+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \text{bzw.} \quad x_2+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Die Wurzel auf der rechten Seite kann man noch etwas vereinfachen, da $\sqrt{4a^2}=2|a|$ ist.

Wenn $a>0$ ist, dann kann der Betragsstrich wegfallen und $\sqrt{4a^2}=2a$ und damit

$x_1+\frac{b}{2a}=+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ bzw. $x_2+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Falls $a<0$ ist, dann ist $\sqrt{4a^2}=-2a$ und damit

$x_1+\frac{b}{2a}=+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ bzw. $x_2+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}=+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

In beiden Fällen erhält man (bis auf die Nummerierung bei x_1 bzw. x_2) die gleichen Gleichungen.

Bringt man jetzt den Term $\frac{b}{2a}$ jeweils auf die rechte Seite, dann erhält man

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{bzw.} \quad x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Jetzt kann man auf den rechten Seiten die beiden Bruchterme noch zusammenfassen, da die Nenner gleich sind:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ bzw. } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Da sich beide Terme nur durch das Rechenzeichen vor der Wurzel unterscheiden, fasst man sie zusammen und schreibt als Kurzform:

$$\boxed{x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Dabei muss man aber beachten, dass dies sind aber zwei verschiedene Gleichungen sind. Das $x_{1/2}$ auf der linken Seite spricht man deshalb auch nicht als „x ein halb", sondern als „x eins zwei" aus.

Üblicherweise verwendet man bei der Berechnung der Lösung x_1 das Pluszeichen, bei x_2 das Minuszeichen.

Diskriminante

Ich habe oben bereits angedeutet, dass es nur dann zwei Lösungen der ursprünglichen Gleichung gibt, wenn der Wert des Terms $D=b^2-4ac$, der unter der Wurzel steht, positiv ist. Die beiden Lösungen der Gleichung kann man dann auch in der Form $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ schreiben.

Hat D den Wert 0, dann gibt es nur eine einzige Lösung, nämlich $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$.

Wenn der Wert von D negativ ist, dann gibt es keine Lösung.

Der Wert von $\boxed{D=b^2-4ac}$ entscheidet also darüber, wie viele Lösungen die quadratische Gleichung hat. Deshalb bezeichnet man D als die **Diskriminante** der quadratischen Gleichung (lat. *discriminare = unterscheiden*).

Vergiss nicht, die restlichen Arbeitsaufträge (1. Seite, Nr. 2, 3, 4) zu erledigen.