Die Kettenregel zum Ableiten verketteter Funktionen

In der Mathematik und auch in der Physik hat man häufig Funktionen, die aus zwei (oder manchmal sogar mehreren) einfacheren Funktionen zusammengesetzt sind.

Beispiele:

a) $f(x) = (x+1)^2$
ist zusammengesetzt aus der *inneren* Funktion $v(x) = x+1$
und der *äußeren* Funktion $u(x) = x^2$.
Die Funktion *f* ergibt sich, wenn man zuerst *v* und dann *u* anwendet.

b) $f(x) = \sqrt{2x}$
ist zusammengesetzt aus der *inneren* Funktion $v(x) = 2x$
und der *äußeren* Funktion $u(x) = \sqrt{x}$.
Auch hier erhält man *f*, wenn man zuerst *v* und danach *u* anwendet.

c) $f(x) = \sin(x^2+3)$
setzt sich aus $w(x) = x^2$, $v(x) = x+3$ und $u(x) = \sin(x)$ zusammen.
In diesem Fall muss man sogar drei Funktionen hintereinander ausführen: zuerst *w*, danach *v* und zum Schluss *u*: $f(x) = u\big(v(w(x))\big)$.

Will man die Ableitungsfunktion einer solchen zusammengesetzten (oder verketteten) Funktion bestimmen, so muss man natürlich alle „Teilfunktionen" berücksichtigen.

Dabei geht man in zwei Schritten vor:

1. Zunächst bildet man die Ableitung der äußeren Funktion und verwendet statt des Arguments *x* aber den Funktionsterm der inneren Funktion,
d.h. man bildet $u'(x)$, setzt aber statt *x* den Term $v(x)$ ein.

2. Anschließend multipliziert man mit der Ableitung $v'(x)$ der inneren Funktion. Diesen Schritt nennt man *Nachdifferenzieren*.

Es gilt also: $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (Kettenregel)

Für die obigen Beispiele sieht das dann folgendermaßen aus:

a) $f(x) = (x+1)^2$ mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = x+1$

Schritt 1: $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$. Nun muss aber *x* durch $v(x) = x+1$ ersetzt werden, also: $u'(v(x)) = 2(x+1)$

Schritt 2: $v(x) = x+1 \Rightarrow v'(x) = 1$

Die Ableitungsfunktion von f erhält man, wenn man beide Terme miteinander multipliziert:
$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
$f'(x) = 2(x+1) \cdot 1$
$f'(x) = 2x+2$

Das gleiche Ergebnis hätte man auch erhalten, wenn man $f(x) = (x+1)^2$ ausmultipliziert und anschließend differenziert hätte.

b) $f(x) = \sqrt{2x}$ mit $u(x) = \sqrt{x}$ und $v(x) = 2x$

Schritt 1: $u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Nun muss wieder das x durch $v(x) = 2x$ ersetzt werden, also: $u'\big(v(x)\big) = \frac{1}{2\sqrt{2x}}$

Schritt 2: $v(x) = 2x \Rightarrow v'(x) = 2$

Die Ableitungsfunktion von f erhält man, wenn man beide Terme miteinander multipliziert:

$f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

Auch dieses Ergebnis hätte man ohne Verwendung der Kettenregel herleiten können, wenn man $f(x) = \sqrt{2x}$ als $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$ schreibt und dieses Produkt differenziert.

c) $f(x) = \sin\big(x^2+3\big)$ mit $w(x) = x^2$, $v(x) = x+3$ und $u(x) = \sin(x)$

Schritt 1: $u(x) = \sin(x) \Rightarrow u'(x) = \cos(x)$.
x durch $v\big(w(x)\big) = x^2+3$ ersetzen: $u'\Big(v\big(w(x)\big)\Big) = \cos\big(x^2+3\big)$

Schritt 2: v nachdifferenzieren $v(x) = x+3 \Rightarrow v'(x) = 1$
Auch hier muss man (im Prinzip) das x durch $w(x) = x^2$ ersetzen, was aber in diesem Fall am Term von $v'(x)$ nichts ändert.

Schritt 3: Jetzt muss noch die innerste Funktion w nachdifferenziert werden:
$w(x) = x^2 \Rightarrow w'(x) = 2x$

Die Ableitungsfunktion von f erhält man, wenn man alle Terme miteinander multipliziert:

$f'(x) = u'\Big(v\big(w(x)\big)\Big) \cdot v'\big(w(x)\big) \cdot w'(x)$

$f'(x) = \cos\big(x^2+3\big) \cdot 1 \cdot 2x$

$f'(x) = 2x \cdot \cos\big(x^2+3\big)$

Bei diesem Beispiel wäre man mit anderen Ableitungsregeln nicht zum Ziel gekommen.

Im Mathematikbuch (Lambacher Schweizer 11) findet man die Verkettung von Funktionen ab Seite 133 und die Kettenregel ab Seite 136.